

KONKURS MATEMATYCZNY

„NIE TYLKO DLA ORŁÓW”

w roku szkolnym 2007/2008

1. Arkusz zawiera 4 zadania konkursowe, na ich rozwiązanie masz 60 minut.
2. Rozwiązanie każdego zadania umieszczaj na oddzielnej podpisanej kartce.
3. W rozwiązaniach zadań podaj wszystkie obliczenia, uzasadnienia oraz odpowiedzi.
4. Nie używaj korektora, błędy przekreślaj.

Zadanie 1 (5 punktów)

- a) Wykaż, że liczba $3^{18} - 2^{18}$ jest podzielna przez 19.
- b) Sprawdź, czy liczba $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ jest liczbą naturalną.

Zadanie 2 (6 punktów)

Oblicz, dla jakiego a funkcje $f(x) = -2x + 3 - a$ oraz $g(x) = 3x + a$ mają to samo miejsce zerowe. Następnie:

- a) zapisz wzory funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$
- b) oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji oraz osią OY
- c) podaj dla jakich argumentów spełniona jest nierówność $f(x) \leq g(x)$.

Zadanie 3 (4 punktów)

Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta ABC przy wierzchołkach A i B przecinają się w punkcie S. Przez punkt S poprowadzono prostą równoległą do boku AB, przecinającą bok AC w punkcie D, zaś bok BC w punkcie E.

Wykaż, $|DE| = |AD| + |BE|$.

Zadanie 4 (5 punktów)

Trójkąt równoboczny o boku długości 5 cm obraca się raz wokół boku, a drugi raz wokół wysokości. Oblicz stosunek powierzchni otrzymanych brył.

KONKURS MATEMATYCZNY

„Nie tylko dla orłów”

w roku szkolnym 2009/2010

1. Arkusz zawiera 4 zadania konkursowe, na ich rozwiązanie masz 60 minut.
2. Rozwiązanie każdego zadania umieszczaj na oddzielnej, podpisanej kartce.
3. W rozwiązaniach zadań podaj wszystkie obliczenia, uzasadnienia i odpowiedzi.
4. Nie używaj korektora, błędy przekreślaj.

Zadanie 1 (5 pkt.)

- a) Czy liczba $\sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$ jest wymierna? Uzasadnij odpowiedź.
- b) Wykaż, że liczba $2 \cdot 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8$ jest nieparzysta.

Zadanie 2 (5 pkt.)

W jednej z bajek półlegendarny bajkopisarz grecki Ezop (VI w. p. n. e.) przytacza taką rozmowę muła z osłem:

- *Sprawiedliwiej byłoby zdjąć ze mnie jeden worek i nałożyć go na ciebie, wtedy mielibyśmy po równo – mówił muł.*

Na to osioł:

- *Sprawiedliwiej byłoby zrobić odwrotnie, zdjąć ze mnie jeden worek i włożyć go na ciebie, abyś jako silniejszy dźwigał dwa razy więcej ode mnie.*

Ile worków niósł na grzbiecie muł, a ile osioł?

Zadanie 3 (5 pkt.)

Wykres funkcji liniowej $y = f(x)$ przechodzi przez punkty A(2,4) i B(4,0). Dana jest również funkcja o wzorze $g(x) = |x - 2| - 2$.

- a) wyprowadź wzór funkcji liniowej $y = f(x)$
- b) wykonaj wykresy funkcji $f(x)$ i $g(x)$ w jednym układzie współrzędnych
- c) zaznacz figurę ograniczoną wykresami funkcji $f(x)$ i $g(x)$ oraz osią Y
- d) oblicz pole otrzymanej figury w podpunkcie c.

Zadanie 4 (5 pkt.)

Na przeciwprostokątnej i na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego zbudowano półkola. (półkole zbudowane na przeciwprostokątnej zawiera cały trójkąt, a półkola na przyprostokątnych są na zewnątrz trójkąta). Udowodnij, że suma pól powstałych „półksiężyców” jest równa polu danego trójkąta.

KONKURS MATEMATYCZNY **„Nie tylko dla orłów” 2006/2007**

1. Arkusz zawiera 4 zadania konkursowe, na ich rozwiązanie masz 60 minut.
2. Rozwiązania każdego zadania umieszczaj na oddzielnej podpisanej kartce.
3. W rozwiązaniach zadań podaj wszystkie obliczenia, uzasadnienia oraz odpowiedzi.
4. Nie używaj korektora, błędy przekreślaj.

Zadanie 1 (5 pkt.)

Koło i trójkąt równoboczny mają równe pola o wartości P . Wyznacz obwody tych figur. Która figura ma większy obwód?

Zadanie 2 (5 pkt.)

Wykresy funkcji $f(x) = 2ax - 4b$ i $g(x) = -ax + 5b$ przecinają się w punkcie $A = (3, 2)$.

- a) Oblicz a i b oraz zapisz wzory funkcji.
- b) Wykonaj wykresy funkcji f i g .
- c) Oblicz pole figury ograniczonej wykresami tych funkcji i osiami układu współrzędnych.
- d) Dla jakich argumentów $f(x) \geq g(x)$.

Zadanie 3 (5 pkt.)

Trzycyfrowa liczba kończy się cyfrą 4. Gdy przesuniemy tę cyfrę na pierwsze miejsce, a pozostałe dwie cyfry pozostawimy bez zmiany, otrzymamy liczbę, która jest o 81 mniejsza od liczby pierwotnej. Znajdź tę liczbę. Zapisz uzasadnienia.

Zadanie 4 (5 pkt.)

Przekrój ostrosłupa prawidłowego czworokątnego utworzony przez płaszczyznę przechodzącą przez dwie krawędzie boczne i przekątną podstawy jest trójkątem prostokątnym o polu 18 cm^2 . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość ostrosłupa.

KONKURS MATEMATYCZNY
„Nie tylko dla orłów”
w roku szkolnym 2008/2009

1. Arkusz zawiera 4 zadania konkursowe, na ich rozwiązanie masz 60 minut.
2. Rozwiązania każdego zadania umieszczaj na oddzielnej podpisanej kartce.
3. W rozwiązaniach zadań podaj wszystkie obliczenia, uzasadnienia oraz odpowiedzi.
4. Nie używaj korektora, błędy przekreślaj.

Zadanie 1 (4 pkt.)

a) Sprawdź czy podana suma jest liczbą naturalną:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

b) Oblicz wartość wyrażenia $\left[\left(6 - 20^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(6 + 20^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2$

Zadanie 2 (5 pkt.)

Punkty A(0, -4), B (-3, 5), C (m, -1) leżą na jednej prostej.

- a) Oblicz m. Podaj wzór funkcji liniowej $y = f(x)$, do której należą punkty A, B, C.
- b) Narysuj wykres funkcji liniowej $y = f(x)$ przechodzącej przez te punkty.
- c) Oblicz pole figury ograniczonej osiami układu współrzędnych oraz wykresem funkcji $y = f(x)$.
- d) W osobnym układzie współrzędnych narysuj wykres funkcji $y = |f(x)|$.

Zadanie 3 (6 pkt.)

W trójkącie ABC, w którym: $|AB| = 12\text{cm}$, $|BC| = 8\text{cm}$, $|AC| = 6\text{cm}$, na boku AB obrano punkty K i M w odległości 3 cm od końców boku i poprowadzono proste KL i MN równoległe do boku AC (L i N należą do boku BC). Oblicz obwód trapezu KMNL.

Zadanie 4 (5 pkt.)

Jeżeli za pewną liczbą dwucyfrową dopiszemy cyfrę jej dziesiątek, to otrzymamy liczbę trzycyfrową o 227 większą od danej. Dopisując zaś przed daną liczbą cyfrę jej jedności, otrzymamy liczbę trzycyfrową 21 razy większą od danej liczby. Jaka to liczba?

KONKURS MATEMATYCZNY
„Nie tylko dla orłów”
w roku szkolnym 2010/2011

1. Arkusz zawiera 4 zadania konkursowe, na ich rozwiązanie masz 60 minut.
2. Rozwiązania każdego zadania umieszczaj na oddzielnej podpisanej kartce.
3. W rozwiązaniach zadań podaj wszystkie obliczenia, uzasadnienia oraz odpowiedzi.
4. Nie używaj korektora, błędy przekreślaj.

Zadanie 1 (5 pkt.)

- a) Cenę sukienki obniżono najpierw o 50%, potem o 25%, a na końcu o 20%. O ile procent zmniejszyła się cena sukienki?

b) Oblicz
$$\frac{(4^{28} - 6 \cdot 4^{25}) \div 4 \frac{1}{7}}{16^{13} + 3 \cdot 4^{25}}$$

Zadanie 2 (5 pkt.)

W trójkącie prostokątnym, o przyprostokątnej 8 cm i przeciwprostokątnej $4\sqrt{5}$ cm, z punktu należącego do przeciwprostokątnej poprowadzono okrąg styczny do przyprostokątnych. Oblicz promień tego okręgu i pole koła ograniczonego tym okręgiem.

Zadanie 3 (5 pkt.)

Rozwiąż zadanie, którego pierwowzór znajdziemy w antologii greckiej.
Pewnego razu Cypryda rzekła do Erosa, który wyglądał bardzo smutnie:
„Dlaczegoś taki zmartwiony, co ci jest synu?”

A Eros odrzekł: „Schodziłem z Helikonu, obładowany wyśmienitemi jabłkami. Muzy potracając mnie zabrały mi prawie wszystko: Kleo wzięła mi piątą część tego, com niósł, Euterpe – dwunastą; Talja – ósmą i Melpomena – dwudziestą. Terpsychora zabrała czwartą część, a Erato wzięła siódmą część dla siebie. Polichymnia porwała 30 jabłek, Urania wzięła 120, a Kaliope, upadając pod ciężarem, uciekła z 300 jabłkami. I oto ręce moje ulżone, gdyż boginie pozostawiły mi tylko 50 jabłek!”

Ile jabłek miał Eros?

Zadanie 4 (5 pkt.)

Przyjmij bez dowodu, że pole trójkąta ABC można obliczyć ze wzoru:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (wzór Herona), gdzie a, b, c są długościami boków trójkąta ABC oraz $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Wyprowadź z tego wzoru wzór na pole trójkąta równobocznego o boku długości a.

KONKURS MATEMATYCZNY

„Nie tylko dla orłów”
w roku szkolnym 2011/2012

1. Arkusz zawiera 4 zadania konkursowe, na ich rozwiązanie masz 60 minut.
2. Rozwiązania każdego zadania umieszczaj na oddzielnej podpisanej kartce.
3. W rozwiązaniach zadań podaj wszystkie obliczenia, uzasadnienia oraz odpowiedzi.
4. Nie używaj korektora, błędy przekreślaj.

Zadanie 1 (5 pkt.)

- a) Sprawdź, czy liczba $3^9 + 3^{10} + 3^{11}$ jest podzielna przez 13.
- b) Każdy bok prostokąta zmniejszono o 20%. O ile procent zmniejszyło się pole tego prostokąta?

Zadanie 2 (4 pkt.)

Rozwiąż zadanie, którego pierwowzór znajdziemy w antologii greckiej.
„ O szlachetny Pitagorasie, pochodzący od muz z Helikonu! Powiedz mi, ilu jest młodych ludzi na placu Wiedzy, gotowych ubiegać się o nagrodę?”
„Ja Ci odpowiem, o Polikratesie! Uważaj: połowa pracuje nad subtelną matematyką, czwarta część przeciwnie, oddaje się badaniu natury Wieczności, gdy tymczasem siódma część zachowuje w zupełnym milczeniu wiedzę w swoim sercu. Dodaj tu jeszcze trzy kobiety, pośród których Teano odznacza się specjalną świetnością i będziesz miał liczbę kapłanów, których przeznaczam muzom.”

Zadanie 3 (6 pkt.)

Przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają długości 4 cm i 8 cm. Oblicz długość wysokości tego trójkąta, opuszczonej na przeciwprostokątną. Oblicz pole koła opisanego na tym trójkącie.

Zadanie 4 (4pkt.)

Akwarium w kształcie prostopadłościanu ma długość 60 cm, a szerokość 25 cm. Kostka sześcienna o krawędzi 10 cm wrzucona do tego akwarium całkowicie zanurzyła się w wodzie. O ile centymetrów podniósł się poziom wody w akwarium?

KONKURS MATEMATYCZNY

„Nie tylko dla orłów”
w roku szkolnym 2012/2013

1. Arkusz zawiera 4 zadania konkursowe, na ich rozwiązanie masz 60 minut.
2. Rozwiązania każdego zadania umieszczaj na oddzielnej, podpisanej kartce.
3. W rozwiązaniach zadań podaj wszystkie obliczenia, uzasadnienia oraz odpowiedzi.
4. Nie używaj korektora, błędy przekreślaj.

Zadanie 1. (5 pkt.)

- a) Jaka jest ostatnia cyfra liczby 3^{150} ? Zapisz obliczenia, objaśnienia.
- b) Uzasadnij, że jeśli a jest liczbą całkowitą, to liczba $(2a + 1)^2 - 1$ jest podzielna przez 8.

Zadanie 2. (5 pkt.)

Proste o równaniach $y = -2x - 2$, $y = -\frac{2}{3}x - 3$ przecinają osie układu

współrzędnych w punktach A, B, C i D. Oblicz współrzędne tych punktów, obwód czworokąta ABCD oraz jego pole.

Zadanie 3. (5 pkt.)

Z jeziora wychylił się o pół stopy z wieczora biały lotosu kwiat.

*Uderzył weń wiatr zawzięty, aż lotos ugięty ucałował o dwie stopy dalej
błysk kryształowej fali.*

Wodo zdradliwa, wodo chłodna jak daleko do dna?

Zadanie 4. (5 pkt.)

Na deser mama przygotowała kompot, który rozlała do szklanek (w kształcie walca o wysokości 10 cm i średnicy podstawy równej 8 cm), napełniając każdą z nich do połowy. Następnie do każdej szklanki włożyła brzoskwinię w kształcie kuli o średnicy 6 cm. Poziom kompotu w szklance wzrósł o x centymetrów. Oblicz, na jaką wysokość sięga w szklance kompot z zanurzoną całkowicie brzoskwinią.

KONKURS MATEMATYCZNY

„Nie tylko dla orłów”
w roku szkolnym 2013/2014

1. Arkusz zawiera 4 zadania konkursowe, na ich rozwiązanie masz 60 minut.
2. Rozwiązania każdego zadania umieszczaj na oddzielnej, podpisanej kartce.
3. W rozwiązaniach zadań podaj wszystkie obliczenia, uzasadnienia oraz odpowiedzi.
4. Nie używaj korektora, błędy przekreślaj.

Zadanie 1. (5 pkt.)

- a) Uzasadnij, że suma $2^{15} + 2^{16} + 2^{17} + 2^{18}$ jest podzielna przez 120.
- b) Oblicz: $\sqrt{1+2004} \cdot \sqrt{1+2003} \cdot \sqrt{1+2002} \cdot \sqrt{1+2001} \cdot 1999$ (wykorzystaj wzory skróconego mnożenia)

Zadanie 2. (5 pkt.)

W równoległoboku ABCD, w którym $|AB| = 10\text{cm}$ i $|BC| = 13\text{cm}$, wierzchołek B leży na symetralnej boku CD. Oblicz przekątne tego równoległoboku.

Zadanie 3. (5 pkt.)

Według legendy, na płycie grobowej wielkiego matematyka starożytnej Grecji Diofantosa z Aleksandrii (III-IV wiek n.e.) był taki napis (ułożony przez Eutropiusza):

„Przechodniu! Pod tym kamieniem spoczywają prochy Diofantosa , który umarł w głębokiej starości. Przez szóstą część swego życia był on dzieckiem, przez dwunastą część – młodzieńcem. Następnie upłynęła siódma część jego życia, zanim się ożenił. W pięć lat po zawarciu związku małżeńskiego urodził mu się syn, który żył dwa razy krócej od niego. W cztery lata po śmierci swego syna Diofantos, opłakiwany przez swych najbliższych, zasnął snem wiecznym. Powiedz, jeśli umiesz obliczać, ile on miał lat, kiedy zmarł”.

Zadanie 4. (5 pkt.)

Wykresy funkcji $f(x) = -3x+1$, $g(x) = 2x+6$, $h(x) = ax+5$ przecinają się w punkcie A.

- a) Oblicz współrzędne punktu A oraz współczynnik a
- b) W jednym układzie współrzędnych wykonaj wykresy funkcji $h(x)$ i $f(x)$
- c) Oblicz pole trójkąta ograniczonego wykresami funkcji $h(x)$ i $f(x)$ oraz osią x.