



Liga Zadaniowa III LO

Seria I - październik 2020

Zadanie 1. Na stole leży sześcienna kostka o krawędzi długości $2N$. Na środku górnej podstawy siedzi krasnal, który chce przejść po powierzchni bryły do dowolnego wierzchołka dolnej podstawy. Wyznaczyć długość najkrótszej takiej trasy.

UWAGA: KRASNAL NIE PRZEJMUJE SIĘ ZBYTNIÓ GRAWITACJĄ, MOŻE BEZ RYZYKA UPADKU CHODZIĆ PO WSZYSTKICH ŚCIANACH KOSTKI

Zadanie 2. Na płaszczyźnie danych jest 6 punktów, przy czym żadne trzy z nich nie są współliniowe. Każde dwa punkty połączono odcinkiem niebieskim lub czerwonym. Pokazać, że pewne trzy z tych punktów są wierzchołkami trójkąta jednokolorowego.

Zadanie 3. Dane są liczby rzeczywiste a, b , takie że $0 \leq a, b \leq 1$. Wykazać, że dla każdych liczb całkowitych dodatnich m, n zachodzi nierówność:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} + \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} + 1 \geq 3ab$$

Zadanie 4. Dana jest liczba pierwsza p większa od 3 oraz liczba całkowita a . Pokazać, że liczby a^{p^2} i a dają tę samą resztę z dzielenia przez 5.

Rozwiązania zadań należy przesłać na adres email ligazadaniowaiiilo@gmail.com do 31 października 2020, godz. 23:59.